ISSN 0124-4361/Vol.5/No.9/Año 2007

CADENAS DE MARKOV, UNA SENCILLA APLICACION

GUSTAVO MESA*

Resumen

En este trabajo se explica un tópico específico de las cadenas de Markov, un campo de aplicación que combina los elementos de la teoría de probabilidad con el álgebra matricial.

Abstrac

In this work explains a specific topic of the chains of Markov, an application field that combines the elements of the theory of probability with matrix algebra

PALABRAS CLAVES

Cadena Markov, Algebra Matricial, Probalidades

KEY WORD

Chain Markov, Álgebra Matricial, Probalidades

1. Introducción

Quizás algunos de los lectores de este artículo en un principio piensen que desconocen situaciones asociadas a este tema, ya sea por que su campo no es el de las probabilidades o el del álgebra de matrices; pero yo estoy seguro que por lo menos habrá escuchado en algún momento las predicciones de algún meteorólogo a través de la radio o la televisión, o durante su vida crediticia ha tenido que estar pendiente de una certificación de Data-crédito para el estudio y aprobación de un crédito. Analicemos lo que en ambos casos se da: el meteorólogo seguramente consulta las imágenes satelitales; pero también sabe que el clima en un día del año corresponde de alguna manera a un fenómeno aleatorio, es así como hoy puede ser soleado (temperaturas altas), ser lluvioso o fresco sin lluvia, y que el clima estaría en una y solo una de estas tres posibilidades y que la ocurrencia de una de ellas excluye a las demás. También es fácil ver que la probabilidad de que en un día específico llueva, o sea soleado o fresco sin lluvia, está muy relacionada con lo ocurrido al clima el día anterior. En la situación de Data-crédito las

* Docente Universidad Cooperativa de Colombia sede Pereira. Facultad de Ciencias Contables y administrativas. Licenciado en Matemática. Especialista en Docencia Universitaria. Investigador principal del proyecto CONADI "Optimización en procesos de producción y asignación de recursos en las empresas del sector confección". gustavomesavi@yahoo.es

entidades financieras saben que sus clientes pueden ser fácilmente clasificados de acuerdo al manejo de sus créditos en excelentes, buenos o deficientes, y que si un cliente es clasificado en alguna de ellas en un mes específico, entonces se excluye de las otras posibilidades; y que estas clasificaciones obedecen a cierta aleatoriedad. Se puede pensar que si un cliente en cierto mes es clasificado como deficiente, lo más seguro es que su crédito sea negado ya que se piensa que para el mes siguiente es muy probable que su comportamiento no cambie, lo que deja ver que la probabilidad de estar en alguno de estos estados (excelente, bueno, deficiente), un mes cualquiera depende de la clasificación del mes anterior, y que es razonable en el análisis del crédito concluir que un manejo deficiente en cierto mes, asegura un mal manejo en el mes siguiente. En los ejemplos expuestos se observa que se está haciendo proyecciones de ciertos comportamientos con base a lo que está ocurriendo o ha ocurrido en un periodo anterior. Con las Cadenas de Markov podremos hacer predicciones de comportamientos futuros como las que se observaron en las situaciones anteriores. Así, si llamamos estados a cada una de estas posibilidades que se pueden presentar en un experimento o situación especifica, entonces podemos visualizar en las Cadenas de Markov una herramienta que nos permitiría conocer a corto y largo plazo los estados en que se encontrarían en periodos o tiempos futuros y tomar decisiones que afectarán o favorecerán nuestros intereses.

2. ¿Qué es una cadena de Markov?

Llamemos E_1, E_2…, E_k los estados (resultados) exhaustivos y mutuamente excluyentes de un experimento aleatorio en cualquier tiempo. Inicialmente en el tiempo t_0, el sistema puede estar en cualquiera de estos estados. Sea a^0_j (j = 0, 1,. . ., k) la probabilidad absoluta de que el sistema se encuentre en el estado E_j en t_0. Definamos p_{ij} como *la probabilidad de transición* de un paso de ir al estado i en t_{n-1}, al estado j en t_n, es decir, la probabilidad de que en el siguiente periodo (paso) se encuentre en E_j, dado que en el periodo (paso) inmediatamente anterior estuvo en E_i. Supongamos que estas probabilidades son estacionarias (no cambian) a través del tiempo. Las probabilidades de transición del estado E_i al estado E_j se describen de manera más conveniente en forma matricial como sigue:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & p_{k3} & \cdots & p_{kk} \end{bmatrix}$$

Por ejemplo p_{21} es la probabilidad de estar en el estado 1 en el siguiente paso, dado que en este momento se encuentra en el estado 2. La matriz P se llama matriz de transición homogénea porque todas las probabilidades p_{ij} son fijas, independientes del tiempo. Las probabilidades p_{ij} deben satisfacer las condiciones

$$\sum_{j}^{k} p_{ij} = 1, \quad \text{para toda } i$$

y

$$p_{ij} \geq 0, \quad \text{para toda } i \text{ e } j$$

Definición 1. Una Cadena de Markov es:

1. Un conjunto de estados E_1, $E_{2\ldots}$, E_k exhaustivos y mutuamente excluyentes de un experimento aleatorio en cualquier tiempo.
2. Una matriz de transición P.

3. Unas probabilidades iniciales a^0_j (j = 0, 1,. . . k)

Ejemplo 1. En un país lejano sólo existen dos posibilidades en el clima, seco y mojado. Un estudiante de meteorología sabe que la probabilidad de que el clima sea seco el 1º de Enero del año en curso es a y la probabilidad de que en dos días consecutivos el clima sea el mismo, tiene un valor p, 0 < p < 1. Escribamos los elementos que identifican en este problema una cadena de Markov.

Solución. Solo hay dos posibles estados E_1: Seco y E_2: Mojado.
Tenemos $a^0_1 = a$, $a^0_2 = 1 - a$.
La matriz P de transición de un paso será:

$$\text{De:} \quad \begin{array}{c|c} & \text{A:} \\ & \begin{array}{cc} \text{seco} & \text{mojado} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{seco} \\ \text{mojado} \end{array} & \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix} \end{array} = P$$

Se observa en P que las probabilidades de clima seco un día, dado que el anterior fue seco; y de mojado un día, dado que el día anterior fue mojado son iguales a p. En cualquier otro caso tenemos una probabilidad de 1 - p.
Las probabilidades a^0_1 y a^0_2, junto con P, determinan en este ejemplo una cadena de Markov.

3. ¿Qué son las probabilidades absolutas y de transición para n pasos?

Dados $\{a^0_j\}$ y P de una cadena de Markov, nos interesa conocer la probabilidad de que ocurra E_j en la transición n. Estas se conocen como las probabilidades absolutas del sistema después de un número Específico n de transiciones. Llamemos $\{a^n_j\}$ estas probabilidades absolutas después de n transiciones. La expresión general de $\{a^n_j\}$ en términos de $\{a^0_j\}$ y P se puede calcular de la siguiente manera:

$$a_j^{(1)} = a_1(0)p_{1j} + a_2(0)p_{2j} + a_3(0)p_{3j} + \cdots = \sum_i a_i^0 p_{ij}$$

También

$$a_j^{(2)} = \sum_i a_i^{(1)} p_{ij} \sum_i \left(\sum_k a_k^{(0)} p_{ki} \right) p_{ij} = \sum_k a_k^{(0)} \left(\sum_i p_{ki} p_{ij} \right) = \sum_k a_k^{(0)} p_{kj}^{(2)}$$

Donde $p^{(2)}_{kj} = \sum p_{ki} p_{ij}$ es la probabilidad de transición de dos pasos o de segundo orden, es decir, la probabilidad de ir del estado k al estado j en exactamente dos transiciones.
Por inducción se puede ver que:

$$a_j^{(n)} = \sum_i a_i^{(0)} \left(\sum_k p_{ik}^{(n-1)} p_{kj} \right) = \sum_i a_i^{(0)} p_{ij}^{(n)},$$

Donde p_{ij} es la probabilidad de transición de n pasos u orden n dada por la formula recursiva:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_k p_{ik}^{(n-1)} p_{kj}$$

En general para todo i y j,

$$p_{ij} = \sum_k p_{ik}^{(n-m)} p_{kj}^{(m)}, \quad 0 < m < n.$$

Los elementos de una matriz de transición más alta $p^{(n)}_{ij}$ se obtienen de forma directa por multiplicación matricial. Así:

$$P^{(2)} = P \cdot P, \quad P^{(3)} = P^{(2)} \cdot P = P^2 \cdot P = P^3$$

y en general

$$P^{(n)} = P^{(n-1)} \cdot P = P^{n-1} \cdot P = P^n.$$

Por tanto, si las probabilidades absolutas se definen en forma vectorial
Como

$$A^{(n)} = \left[a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_k^{(n)} \right]$$

Entonces:

$$A^{(n)} = A^{(0)} P^n$$

Ejemplo 2. Retomemos la situación que se presenta en el ejemplo 1. Si β_n es la probabilidad de clima seco el día n-ésimo de año, n = 0, 1, 2, . . . (n = 0 corresponde al 1º de Enero). Calcular:

1. Una expresión general para β_n
2. El límite de β_n cuando n tiende a ∞

Solución: La matriz de estado inicial es $A^{(0)} = [a \quad 1- a]$ y la matriz

$$P = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix}$$

Es la matriz de transición de un solo paso.
Sabemos que la matriz de probabilidades absolutas para n pasos está dada por

$$A^{(n)} = A^{(0)} P^n$$

Si llamamos:

$A^{(n)} = \begin{bmatrix} \beta_n & 1-\beta_n \end{bmatrix}$. Donde β_n corresponde a la probabilidad de seco en el n-ésimo día, y 1 -β_n a la probabilidad de mojado, entonces:

$$\begin{bmatrix} \beta_n & 1-\beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{a} & 1-\mathrm{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix}^n$$

Para calcular la n-ésima potencia de P, se puede proceder por inducción; veamos:
para n = 1,

$$P = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+(2p-1) & 1-(2p-1) \\ 1-(2p-1) & 1+(2p-1) \end{bmatrix}$$

Para n = 2,

$$P^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+(2p-1)^2 & 1-(2p-1)^2 \\ 1-(2p-1)^2 & 1+(2p-1)^2 \end{bmatrix}$$

Para n = k,

$$P^k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+(2p-1)^k & 1-(2p-1)^k \\ 1-(2p-1)^k & 1+(2p-1)^k \end{bmatrix}$$

Usando este ´ultimo resultado se tiene que:

$$\begin{bmatrix} \beta_n & 1-\beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{a} & 1-\mathrm{a} \end{bmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+(2p-1)^n & 1-(2p-1)^n \\ 1-(2p-1)^n & 1+(2p-1)^n \end{bmatrix}$$

de donde:

$$\begin{bmatrix}\beta_n & 1-\beta_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}+(2p-1)^n(\mathrm{a}-1) & \frac{1}{2}-(2p-1)^n(\mathrm{a}-1)\end{bmatrix}$$

Esto nos permite concluir que la expresión general para β_n es:

$$\beta_n = \frac{1}{2} + (2p-1)^n(\mathrm{a}-1) \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Se responde así el primer interrogante.
La expresión anterior tiende a 1/2 cuando n tiende a ∞, lo que responde el Segundo interrogante.

Bibliografía

[1] Derman, C. Finite State Markovian Decision Processes, Academic Press, New York, 1970.

[2] Howard, R. Dinamic Programing and Markov Processes, MIT Press, Cambridge Mass, 1960.

Este artículo se recibió en el mes de mayo del año 2006, fue aprobado en el mes de mayo de 2007.