Desarrollo de un método matemático dirigido a docentes de Matemáticas para el trabajo con modelos de sucesiones y series polinómicas de diferente orden, aplicable al primer semestre de educación superior

Development of a mathematical method aimed at Math teachers to work with sequences and series models with different polynomial order, applicable to first semester of college

*Carlos José Devia Ortiz**

Presentado: 10 de febrero de 2010 **Aprobado:** 23 de abril de 2010

Resumen

Introducción: este artículo propone un método matemático para el trabajo con sucesiones polinómicas, en especial, las de orden superior y sus respectivas series para reducir también la dificultad del trabajar con las complejas sucesiones y series polinómico-geométricas, con el propósito de que se convierta en una herramienta importante para el uso de docentes y estudiantes. **Metodología:** descriptiva de demostraciones prácticas. **Resultados:** se propone, en particular, de una situación que muestra la secuencia del número regiones formadas de polígonos irregulares con todas sus diagonales entre sus vértices inscritos en una circunferencia, para determinar su término general y uno particular. **Conclusiones:** se concluye que se puede aplicar y extender en modelos matemáticos de diferentes campos y disciplinas del conocimiento y en cursos superiores de sucesiones y series.

Palabras clave: sucesión polinómica, serie geométrica, método matemático, método deductivo, función de diferencia.

Abstract

Introduction: the following article proposes the use of a mathematical method for working with polynomial successions, especially those of higher order and their respective series, in order to reduce the difficulty of working with complex successions and geometric-polynomial series, with the objective of turning it into an important tool to be used by teachers and students. **Methodology:** descriptive empirical evidence. **Results:** we propose, particularly, a situation which shows the sequence of numbers of regions formed by irregular polygonal with all of their diagonals contained within their vertexes and subscribed to a circumference, so to determine its particular and general terms. **Conclusions:** it is concluded that it can be applied and extended in mathematical models in different fields and disciplines of knowledge and in advanced courses of successions and series.

Keywords: polynomial succession, geometric series, mathematical method, deductive method, difference function.

* Licenciado en Educación en Matemáticas y Física, Especialista en Docencia Universitaria, profesor de tiempo completo de la Universidad Cooperativa de Colombia, seccional El Espinal. Correo electrónico: carlosjosedeviaortiz@yahoo.com

Introducción

Las sucesiones son secuencias de la forma $a_1, a_2, a_3,\ldots,a_n$ que representan valores ordenados con respecto a los números naturales consecutivos; el manejo de éstas permite determinar el término general (a_n) o el particular de la sucesión para la aplicación del análisis de comportamientos, estimaciones o pronósticos. Un ejemplo de sucesión es secuencia de regiones resultantes de polígonos irregulares (desde el triángulo) inscritos en un círculo con todas las diagonales entre sus vértices. Las sucesiones polinómicas se caracterizan por que su término general (a_n) es una función $a_n=a_1n^k+a_2n^{k-1}+ a_3n^{k-2}+\ldots+ a_{k+1}$ para n=1, 2, 3,.. y k entero positivo. Si en una sucesión polinómica $\{a_n\}$ con términos finitos $a_1, a_2, a_{3,\ldots}$ se efectúa a cada par consecutivo la operación $a_{i+1} - a_i$ resulta una nueva sucesión $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ (primer nivel de diferencia) y al realizar $b_{i+1} - b_i$ resulta $c_1, c_2, \ldots c_{n-2}$ (segundo nivel de diferencia), y así sucesivamente se obtiene el k-ésimo nivel de diferencia correspondiente a una sucesión constante d, d,.. (sucesión de grado cero) e indica a la vez que la sucesión inicial $(a_1, a_2, a_{3,\ldots})$ tiene un término general de grado (k), la sucesión del primer nivel de diferencia es de grado k-1, la siguiente tendrá grado k-2, y así consecutivamente.

Una serie es una sumatoria de términos de una sucesión representada de forma extensa como $a_1 + a_2 + a_3+\ldots+ a_n$, considerada también como la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales de la forma a_1, $a_1 +a_2$, $a_1 +a_2+a_3$,.. , $a_1 +a_2+\ldots+a_n$. Asignándose s_i a cada suma parcial $s_1=a_1$, $s_2=a_1+a_2$, $s_3=a_1+a_2+a_3$, $s_n= a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ resulta la sucesión $s_1,s_2,s_2,\ldots s_n$. El grado del polinomio a_n es (k) y el grado del polinomio s_n es (k+1), por ejemplo:

La serie finita:

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} (2n - 1) = 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n + 1)$$

tiene una sucesión de sumas parciales: $3,8,15,\ldots,(n^2 + 2n)$ La serie geométrica es $\sum_n k^n$ con k número real. Si n = 0 la serie es expandida es:

$$1 + k + k^2 + \ldots + k^n$$

En la asignatura de matemáticas se plantea y formula una serie de problemas con aplicaciones interdisciplinarias en diferentes áreas del conocimiento con modelos de sucesiones y series. Se observa que en textos y en cursos de matemáticas del primer nivel de educación superior, el trabajo con sucesiones y series polinómicas es limitado y si éstas son de alto grado, aún más.

El propósito de este artículo es exponer el desarrollo de un método matemático que sirva de herramienta práctica para la solución de situaciones acerca sucesiones y series polinómicas.

La estructura del trabajo es la siguiente: en la sección 3 se dan las etapas del desarrollo metodológico de la investigación. En la sección 4 se reflexiona acerca de la situación actual que se orienta en los cursos de matemáticas del primer semestre de educación superior con respecto a la temática de sucesiones y series. En la sección 5 se muestran aportes del análisis numérico con respecto a las funciones de diferencia, siendo éstas fundamentales para el desarrollo del método. En la sección 6 se dispone de una situación en particular de la geometría como ejemplo, para observar algunos métodos de solución de ésta. En la sección 7 se realiza una demostración deductiva del método. En la 8 se presenta un arreglo que facilita el proceso y se describen los pasos del método solucionando la situación particular propuesta en la sección 6. En la sección 9 se observan situaciones que brindan y posibilitan otros alcances del método investigado. Finalmente, en la sección 10 se concluye acerca de los resultados obtenidos.

Metodología

El proyecto se realizó en 6 etapas, siguiendo una metodología de investigación acción inicialmente (etapa 1), ya que ésta permite captar datos, interpretarlos para realizar diagnóstico, reflexionar, analizar la información y el estado actual del tema en la comunidad universitaria; y continúa después con la aplicación del método deductivo en las siguientes etapas de la investigación.

Fuentes de información

- Primaria: se obtuvo información de los docentes.
- Secundaria: se consultó bibliografía especializada al respecto.

Etapas del proceso investigativo

La primera etapa se dividió en dos partes que corresponden a la ilustración acerca del tema, sus contenidos, métodos y adversidades para su aplicación:

- Parte a: consulta bibliográfica de 30 textos de matemáticas superiores (últimas ediciones) para indagar los contenidos en sucesiones y series para el primer semestre universitario. Relacionando los textos más utilizados por los docentes y analizando los contenidos acerca del objeto de estudio y los métodos utilizados para el trabajo con respeto al tema seleccionado.
- Parte b: se realizó una encuesta y el análisis de resultados de ésta a 30 docentes activos de educación superior que orienten o hallan orientado cátedra de matemáticas en el primer semestre de educación superior, para explorar los contenidos suministrados a los estudiantes con respecto al tema de sucesiones y la disposición se tiene con respecto a las sucesiones de orden superior.

Para las siguientes etapas se desarrolla el método teniendo en cuenta las experiencias computacionales obtenidas con herramientas del *software* Mathcad Profesional, a través de las iteraciones con sucesiones y polinomios de diferente orden, facilitando la realización de la demostración formal, obtención de un arreglo y etapas la extensión y alcance del método.

Reflexión acerca del trabajo con sucesiones y series polinómicas

Se observa que los textos universitarios limitan la temática de sucesiones y series polinómicas de orden superior. Algunos textos utilizan el método inductivo para generar términos generales de una secuencia numérica (no se observa otra estrategia). Algo similar ocurre con los docentes de las instituciones universitarias donde se realizaron las encuestas.

Aportes del análisis numérico para el trabajo con funciones de diferencia

Estudios del análisis numérico muestra cómo calcular y presentar de manera eficiente las diferencias de una función real en puntos igualmente espaciados. Los números se escriben en una tabla de diferencias hacia adelante, hacia atrás y central de muchos órdenes se pueden localizar fácilmente para cualquiera de las abscisas tabulares (Smith, 1998).

Estas tablas de diferencia se utilizan para varios propósitos, entre otros, obtener una expresión o polinomio que más se ajuste a los valores de la tabla dada.

Un polinomio que se ajuste de manera exacta a los valores de la tabla dada es lo que se llama un polinomio de colocación para esta tabla.

La tabla de diferencias se construye con las ordenadas o imagen a_i de la función o sucesión. Construyendo una fila a la vez con el procedimiento siguiente: restamos a cada entrada la entrada anterior (excepto el principio de cada fila donde no hay entrada anterior) y escribimos el resultado en la fila siguiente. Es ventaja si se balancea cada entrada de fila a medio espacio y el número de filas a calcular depende de la cantidad de números o términos a que se tengan (tabla 1).

Tabla 1. **Tabla de diferencias de una sucesión a_1, a_2, a_3,...**

k_i	k_0		k_1		k_2		k_3 ...		k_n
a_i	a_0		a_1		a_2		a_3 ...		a_n
$a_{i+1} - a_1 = b_i \; \Delta a_i$		b_0		b_1		b_2 ...		b_n	
$b_{i+1} - b_i = c_i \; \Delta^2 a_i$			c_0		c_1 ...		c_n		
$c_{i+1} - c_1 = d_i \; \Delta^3 a_i$					d_0 ...				

Fuente: Análisis numérico de W. Allen Smith

Situación acerca de sucesiones

Se plantea una situación que muestra la secuencia de regiones resultantes de polígonos irregulares (desde el triángulo) inscritos en un círculo con todas las diagonales entre sus vértices (figuras 1, 2, 3, 4 y 5). Halle el término general de la sucesión, ¿cuántas regiones se pueden formar en un polígono de 12 lados?

La secuencia se ordena así: 4, 8, 16, 31, 57, 99,... Si se observan detenidamente sus primeros elementos parecen ser parte de la sucesión geométrica de base 2 cuyos términos son 2,4,16,32,64,128..., pero realmente se trata de una sucesión polinómica de cuarto grado según lo indican los niveles de diferencia.

Solución de la situación mediante el planteo de un sistema de ecuaciones

La sucesión es de la forma:

$$
\begin{aligned}
&f(n) = A\cdot n^4 + B\cdot n^3 + C\cdot n^2 + D\cdot n + E\\
&f(1) = A + B + C + D + E\\
&f(2) = 16\cdot A + 8B + 4C + 2E + E\\
&f(3) = 81A + 27B + 9C + D + E\\
&f(4) = 256A + 64B + 16C + 4D + E\\
&f(5) = 635A + 125B + 25C + 5D + E
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta para n=1,2...5
Resulta un sistema lineal de 5 incógnitas:

$$
\begin{aligned}
&A + B + C + D + E = 4\\
&16A + 8B + 4C + 2E + E = 8\\
&81A + 27B + 9C + D + E = 16\\
&256A + 64B + 10C + 4D + E = 31\\
&625A + 125B + 25C + 5D + E = 57
\end{aligned}
$$

Solucionando por el método de eliminación de Gauss-Jordan (Grossman, 1997), se tiene:

$$A = \frac{1}{24} \quad B = \frac{1}{12} \quad C = \frac{11}{24} \quad D = \frac{17}{12} \quad E = 2$$

Comenzando con n = 0 el sistema y su complejidad para resolverlo se reduce a otra sucesión cuártica:

$$a\cdot n^4 + b\cdot n^3 + c\cdot n^2 + d\cdot n + e$$

Resultando el sistema de cuatro incógnitas, cuya solución es:

$$a = \frac{1}{24} \quad b = \frac{1}{4} \quad c = \frac{23}{24} \quad d = \frac{11}{4} \quad E = 4$$

Lo que indica que el término general de la sucesión 4, 8, 16, 31, 57, 99… es:

$$\frac{1}{24}.n^4 + \frac{1}{12}n^3 + \frac{11}{24}n^2 + \frac{17}{12}\,n + 2 \qquad \text{Si n} = 1,2,3,\ldots$$

$$\frac{1}{24}n^4 + \frac{1}{4}.n^3 + \frac{23}{24}.n^2 + \frac{11}{4}.n + 4 \qquad \text{Si n} = 0,1,2,\ldots$$

Como f (1) = 4 correspondiente a las regiones del triángulo. Entonces f (10) es el número de regiones del dodecágono:

$$\mathrm{f(n)} = \frac{1}{24}.n^4 + \frac{1}{12}.n^3 + \frac{11}{24}.n^2 + \frac{17}{12}.n + 2$$

$$\mathrm{f(n)} = \frac{1}{24}.n^4 + \frac{1}{12}.n^3 + \frac{11}{24}.n^2 + \frac{17}{12}.n + 2$$

$$\mathrm{f(10)} = 562$$

Solución de la situación mediante la fórmula de diferencias hacia delante de Newton (NFDF)

La situación anterior se puede resolver con uso de fórmulas del análisis numérico mediante la fórmula de Newton:

$$\mathrm{a_n} =$$

$$\mathrm{a_0 + (n - k_0) \cdot \Delta a_0 + \frac{(n - k_0)\cdot(n - k_1)}{2!} \cdot \Delta^2\, a_0 + \cdots . + \frac{(n - k_0)\cdot(n - k_1)" \cdots "(n - k_{1-1})}{k!} \cdot \Delta^k\, a_0}$$

O también con la siguiente:

$$\mathrm{a_n = a_0 + (n - k_0) \cdot\ b_0 + \frac{(n-k_0)\cdot(n-k_1)}{2!} \cdot \ldots\ c_0 + \frac{(n- k_0)\cdot(n-k_1)\cdot(n-k_2)}{3!} \cdot d_0 +}$$

Para la secuencia, se remplaza en la segunda fórmula y se simplifica (tabla 2).

$$\mathrm{k_0 = 0,1,2,\ldots 5}$$

$$\mathrm{a_0 = 4 \quad b_0 = 4 \quad c_0 = 4 \quad d_0 = 3 \quad e_0 = 1}$$

$$\mathrm{a_n = 4 + n\cdot(4) + \frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot(4) + \frac{n(n-1)\cdot(n-2)}{6}\cdot(3 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{24}\cdot(1) = \frac{1}{24}\cdot n^4 + \frac{1}{4}\cdot n^3 + \frac{23}{24}\cdot n + \frac{11}{4}\cdot n + 4 \quad Par = 0,1,2\ldots,5}$$

Tabla 2. **Tabla de diferencias secuencia de las regiones de los polígonos inscritos en una circunferencia**

k_i	0	1	2	3	4	5
a_i	4	8	16	31	57	99
$b_i = \Delta a_i$	4	8	15	26	42	
$c_i = \Delta^2 \cdot a_{i\ldots}$	4	7	11	16		
$d_i = \Delta^3 \cdot a_i$	3	4	5			
$e_i = \Delta^4 \cdot a_i$	1	1				

Fuente: el autor

Las siguientes figuras muestra el número de regiones resultantes de polígonos irregulares, inscritos en un círculo con todas las diagonales entre sus vértices desde el triángulo hasta el hexágono:

Revista Nacional de Investigación - Memorias
Volumen 8, Número 13 / enero-junio 2010

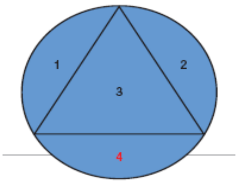

Figura1

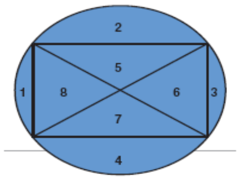

Figura 2

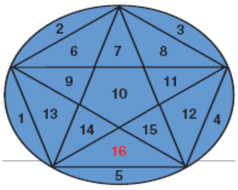

Figura 3

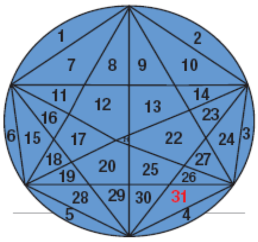

Figura 4

Fuente: Memorias del Primer Congreso Internacional y Tercer Encuentro Departamental de Matemática Educativa en el Instituto Leonidas Rubio Villegas de Ibagué, Tolima

Demostración del método

Partiendo de la sucesión cuyo término general es:

Desarrollando $a_{n+1} - a_n$:

$$A\cdot(n+1)^5 + B\cdot(n+1)^4 + C\cdot(n+1)^3 + D\cdot(n+1)^2 + E\cdot(n+1) + F - A\cdot n^5 - C\cdot n^4 - D\cdot n^2 - E\cdot n - F = 5\cdot A\cdot n^4 + (10\cdot A + 4B)\cdot n^3 + (10\cdot A + 6B + 3C)\cdot n^2 + (5\cdot A + 4B + 3C + 2D)\cdot n + (A+B+C+D)$$

Los coeficientes de la sucesión de diferencias son:

$A_1 = 5\cdot A$
$B_1 = 10A + 4\cdot B$
$C_1 = 10A + 6B + 3C$
$D_1 = 5\cdot A + 4\cdot B + 3C + 2D$
$E_1 = A + B + C + D$

Expresada de la siguiente forma:

$$b_n = A_1\cdot n^4 + B_1\cdot n^3 + C_1\cdot n^2 + D_1\cdot n + E \qquad (1)$$

La ecuación (1) es el término general de la sucesión del primer nivel de diferencias.
Si a este término general de la sucesión (1) se efectúa $b_{n+1} - b_n$

$$= A_1\cdot(n+1)^4 + B_1\cdot(n+1)^3 + C_1\cdot(n+1)^2 + D_1(n+1) + E_1 - A_1\cdot n^4 - B_1\cdot n^3 - C_1\cdot n^2 - D_1\cdot n - E_1$$

Resulta:

$$4A_1\cdot n^3 + (6\cdot A_1 + 3\cdot B_1)\cdot n^2 + (4\cdot A_1 + 3\cdot B_1 + 2\cdot C_1)\cdot n + (A_1 + B_1 + C_1 + D_1)$$

Cambiando los coeficientes por A_2, B_2, C_2 y D_2 respectivamente, se genera la sucesión (segundo nivel de diferencias):

$$C_n = A_2\cdot n^3 + B_2\cdot n^2 + C_2\cdot n + D_2 \qquad (2)$$

Continuando sucesivamente este proceso de diferencias se obtiene el quinto nivel de diferencia cuya sucesión es un término constante $A_5 = K$.

Se deduce que para cualquier sucesión polinómica de grado k su k-esimo nivel de diferencia es una sucesión constante K.

Resumiendo, el proceso para la sucesión de grado quinto se observa:

Nivel 0:

$$A\cdot x^5 + B\cdot x^4 + C\cdot x^3 + D\cdot x^2 + E\cdot x + F$$

Nivel 1:

$$(5A)\cdot n^4 + (10\cdot A + 4B)\cdot n^3 + (10A + 6B + 3C)\cdot n^2 + (5A + 4B + 3C + 2D)\cdot n + A + B + C + D = A_1\cdot n^4 + B_1\cdot n^3 + C_1\cdot n^2 + D_1\cdot n + C_1$$

Nivel 2:

$$(4A_1)\cdot n^3 + (6A_1 + 3B_1)\cdot n^2 + (4A_1 + 3B_1 + 2C_1)\cdot n + (A_1 + B_1 + C_1) = A_2\cdot n^3 + B_2\cdot n^2 + C_2\cdot n + D_2$$

Nivel 3:

$$(3A_2)\, n^2 + (3A_2 + 2B_2)\cdot n + (A_2 + B_2 + C_2) = A_3\cdot n^2 + B_3\cdot n + C_3$$

Nivel 4:

$2A_3 \cdot n + (A_3 + B_3) = A_4 \cdot n + B_4$

Nivel 5:

$A_4 = A_5 = K$

Obtención de un arreglo

Como resulta dispendioso realizar el proceso de expansión, simplificación y ordenación de los niveles de diferencia de una sucesión, se dispone del siguiente arreglo *triángulo para el cálculo de coeficientes de sucesiones polinómicas*, el cual ayuda a determinar los coeficientes de las sucesiones de diferencia para cualquier orden.

Este arreglo es un modelo parecido al triángulo de pascal y se aplica en diferentes momentos, siguiendo el orden de las flechas del arreglo. Permite calcular en el momento 1 los coeficientes de la sucesión de diferencias de orden cuadrático (antepenúltimo nivel); en el momento 2, los coeficientes de las sucesiones de diferencia de orden cúbico, y así sucesivamente hasta obtener el la sucesión de diferencia del nivel cero, pudiendo ser un sucesión polinómica de alto orden o grado como la quintica (figuras 5, 6 y 7).

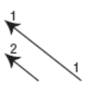

Figura 5
(momento 1)

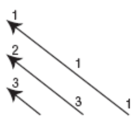

Figura 6
(momento 2)

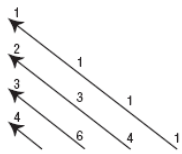

Figura 7
(momento 3)

Fuente: el autor

Ejemplo 1

Mediante el método desarrollado se resolverá la situación anteriormente planteada, la sucesión 4,8,16,31,57,99... que muestra la secuencia de regiones resultantes de polígonos irregulares (desde el triángulo) inscritos en un círculo con todas las diagonales entre sus vértices. Determinando el término general y las regiones que se forman en un dodecágono.

- Paso 1: determinar el grado de la sucesión incógnita mediante niveles de diferencia.
- Paso 2: determinación de términos generales de las sucesiones de nivel de diferencias.

a. Se inicia con la sucesión lineal (penúltimo nivel de diferencia):

$A_3 \cdot n + B_3$

Para esta sucesión el coeficiente $A_3=A_4=1$, resulta la sucesión $n+B_3$, y para n=1, $1+B_3 = 3$ (primer término de la sucesión del tercer nivel de diferencia), se obtiene:

$B_3 = 2$

Entonces la sucesión del penúltimo nivel de diferencia es:

$n + 2$

b) Para determinar la sucesión cuadrática

$A_2 \cdot n^2 + B \cdot n + C_2$

Se utilizan los coeficientes del arreglo de la figura 1, así:

$2A_2 = A_3$
$A_2 + B_2 = B_3$

Obteniéndose:

$A_2 = \dfrac{1}{2}$ y $B_2 = \dfrac{3}{2}$

Para hallar el término independiente C_2 se procede de la misma manera como se hallo B_3:

$\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} + C_2 = 4$

$C_2 = 2$

c) Se determinan los coeficientes de la sucesión cúbica

$A_1 \cdot n^3 + B_1 \cdot n^2 + C_1 \cdot n + D_1$

Usando los coeficientes de la figura 2 se obtienen las siguientes ecuaciones:

$3A_1 = A_2$
$3A_1 + 2B_1 = B_2$
$A_1 + B_1 + C_1 = C_2$

Las soluciones son:

$A_1 = \frac{1}{6} \quad B_1 = \frac{1}{2} \quad C_1 = \frac{4}{3}$

Luego de D_1 es igual 2, resultando la sucesion del tercer nivel de diferencia:

$$\frac{1}{6} \cdot n^3 + \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{4}{3} \cdot n + 2$$

d) Se calcula ahora los coeficientes de la sucesión de cuarto grado:

$A \cdot n^4 + B \cdot n^3 + c \cdot n^2 + D \cdot n + E$

Mediante los términos de la figura 3 se obtiene las siguientes ecuaciones:

$4A = A_1$
$6A + 3B = B_1$
$4A + 3B + 2C = C_1$
$A + B + C + D = D_1$

Resolviendo de igual forma a las anteriores se obtiene la sucesión objetivo:

$$a_n = \frac{1}{24} \cdot n^4 + \frac{1}{12} \cdot n^3 + \frac{11}{24} \cdot n^2 + \frac{17}{12} \cdot n + 2$$

Para n=1, 2, 3,..

- En el procedimiento se observa que los términos independientes se obtienen restando del primer término de la sucesión de términos constantes los demás coeficientes de la respectiva sucesión.
- Si la sucesión se inicia desde n=0 el proceso se facilita aun más dado que los términos independientes de cada nivel se determinan de forma inmediata. En este caso, la sucesión resultante es:

$$a_n = \frac{1}{24} \cdot n^4 + \frac{1}{4} \cdot n^3 + \frac{23}{24} \cdot n^2 + \frac{11}{4} \cdot n + 4$$

Para n=0,1, 2,...

Pudiéndose encontrar que para n=10 la figura (dodecágono), tendrá 562 regiones.

Alcance del método

Alcance del modelo matemático a las sucesiones polinómico geométricas. Hay dos tipos de sucesiones polinómico-geométricas:

Tipo 1: Sucesión polinómico-geométrica con término geométrico aditivo

Formas generales

Forma 1:

$a \cdot r^n + b \cdot n + c$ Sucesión aritmético- geométrica

Forma 2:

$a \cdot r^n + b \cdot n^2 + c \cdot n + d$ Sucesión cuadrático-geométrica

Forma 3:

$a \cdot r^n + b \cdot n^3 + c \cdot n^2 + d \cdot n + e$ Sucesión cúbico-geométrica

Forma 4:

$a \cdot r^n + b \cdot n^4 + c \cdot n^3 + d \cdot n^2 + e \cdot n + f$ Sucesión cuartico-geométrica

Los coeficientes a, b, c, d, e, y la razón r son números reales.

Ejemplo 2

Halle el término general de la siguiente secuencia de términos:

1,4,9,22,55,132,301,658. (3)

Desarrollo: se sustraen consecutivamente sus términos:

3,5,13,77,169,357…	Primer nivel de diferencias
2,8,20,44,92,188…	Segundo nivel de diferencias
6,12,24,48,96…	Tercer nivel de diferencias

Se calcula el término general de la sucesión del tercer nivel de diferencia siendo esta una sucesión geométrica de razón 2:

$$6,12,24,48,96\ldots,3(2)^n \qquad (4)$$

Se sustrae de (3) cada término de la sucesión (4) resultando:

$$-5,-8,-15,-26,-41\ldots \qquad (5)$$

A la sucesión (5) se le aplica el primer paso del método para determinar su grado:

-5,-8,-15,-26,-41…	Nivel de diferencia 0
-3,-7,-11,-15…	Nivel de diferencia 1
-4,-4,-4…	Nivel de diferencia 2

Se deduce que la sucesión (5) es polinómica de grado 2 o cuadrática de la forma:

$$A \cdot n^2 + B \cdot n + C$$

Siguiendo los demás pasos se obtiene el término general de la sucesión (5):

$$-2n^2 + 3n - 6$$

La sucesión buscada es la suma de las sucesiones (4) y (5):

$$3(2)^n -2n^2 + 3n - 6$$

Tipo 2: Sucesión polinómico-geométrica con término geométrico multiplicativo

Formas generales:

Forma 1:

$(a \cdot n + b) \cdot r^n$ Sucesión aritmético- geométrica (Murray, 1998)

Forma 2:

$(a \cdot n^2 + b \cdot n + c) \cdot r^n$ Sucesión cuadrático-geométrica

Forma 3:

$(a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d) \cdot r^n$ Sucesión cúbico-geométrica

Observación: si la sucesión polinómico-geométrica es dada como una secuencia de términos constantes a_1, a_2, a_3… Su razón r se debe hallar resolviendo la ecuación correspondiente para las formas anteriores. Los coeficientes a, b, c… se pueden hallar con aplicación del método matemático. Las ecuaciones para las formas anteriores son:

$a_1 \cdot r^2 - 2 \cdot a_2 \cdot r + a_3 = 0$ Forma 1
$a_1 \cdot r^3 - 2 \cdot a_2 \cdot r^2 + 3a_3 \cdot r - a_4 = 0$ Forma 2
$a_1 \cdot r^4 - 4 \cdot a_2 \cdot r^3 + 6a_3 \cdot r^2 - 4a_4 \cdot r + a_5 = 0$ Forma 2

Observación: se obtiene r resolviendo las ecuaciones que se presentan en las diferentes formas-geométrica del tipo 2. Se observa también que son sencillas de memorizar ya que sus coeficientes corresponden a los del triángulo de Pascal con signos alternados (figura 8) y si las razones son números racionales la solución de estas ecuaciones es práctica, pudiéndose realizar por división sintética. Una vez se ha determinado la razón, entonces se procede a hallar los coeficientes a, b, c, d,… aplicando el método.

```
        1
      1  2  1
    1  3  3  1
  1  4  6  4  1
1  5  10  10  5  1
```

Figura 8. Triángulo de Pascal
Fuente: Álgebra de Baldor

Ejemplo 3

Determine el término general de la siguiente secuencia de términos constantes:

-12,-54,-162,-324,0,4374... (6)

Desarrollo:

Se ensaya si la sucesión es cuadrático-geométrica, con factor geométrico multiplicativo (forma 2). Se puede encontrar una razón r con la ecuación para la forma 2:

$a_1 \cdot r^3 - 3 \cdot a_2 \cdot r^2 + 3 \cdot a_3 \cdot r - a_4 = 0$
$a_1 = -12$
$a_2 = -54$
$a_3 = -162$
$a_4 = -324$

Remplazando los términos y simplificando la ecuación resulta:

$2 \cdot r^3 - 27 \cdot r^2 + 81 \cdot r - 54 = 0$

Resolviendo la ecuación, se encuentra una solución racional:

$r = 3$

Retomando la sucesión (6) y dividiendo por $3, 3^2, 3^3 \ldots$ a cada término de ésta se obtiene:

-4,-6,-6,-4,0,6. (7)

Como la sucesión resultante (7) es polinómica de grado 2 mediante el uso del método se halla:

$n^2 - 5n$

El término general de la sucesión cuadrático geométrica (6) es:

$(n^2 - 5n)\ (3)^n$

Alcance del modelo matemático a las series polinómicas

Series polinómicas

Formas generales

Forma 1 (serie aritmética):

$$\sum_{n=1}^{n} (a \cdot n + b)$$

Forma 2 (serie cuadrática):

$$\sum_{n=1}^{n} (a \cdot n^2 + b \cdot n + c)$$

Forma 3 (serie cúbica):

Ejemplo 3

Determine una fórmula general para la serie y halle la sumatoria de sus 100 primeros términos:

$$\sum_{n=1}^{100} n^2$$

Desarrollo:

Se representa la serie en su forma extensa.

$1 + 4 + 9\ 16 + 25 + 36 + \ldots. + n^2$ Se realizan las sumas parciales de la serie, convirtiéndolas en una sucesión:

$1,(1 + 4),(1 + 4 + 9),(1 + 4 + 9 + 16) \ldots = 1,5,14,30\ldots$(8)

La sucesión (8) es una sucesión polinómica de grado superior a la serie (es de grado 3). Se verifica con sus niveles de diferencia. Aplicando el método se encuentra que la sucesión (8) es:

$$\sum_{n=1}^{n} n^2 = \frac{1}{3} \cdot n^3 + \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{6} \cdot n$$

Entonces la suma de los 100 primeros términos de la serie es:

$$\sum_{n=1}^{100} n^2 = \frac{1}{3} \cdot n^3 + \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{6} \cdot n$$
$$= 338350$$
$$= \frac{1}{3} \cdot (100)^3 + \frac{1}{2} \cdot (100)^2 + \frac{1}{6} \cdot (100)$$

Conclusiones y reflexiones

Problemas aplicables a cualquier área del conocimiento relacionados con sucesiones y series polinómicas se resolverán de una manera práctica, mediante el método propuesto sin necesidad de recurrir a estrictos y rigurosos métodos de demostración, a la solución de sistemas de ecuaciones de alto orden o a cursos superiores como el análisis numérico. Se aclara también que no se debe dejar a un lado la rigurosidad de las matemáticas en ciertos aspectos esenciales de la enseñanza y aprendizaje para demostrar la validez de una hipótesis que contribuya al desarrollo del pensamiento lógico-matemático.

Para trabajar este método con sucesiones polinómicas se necesita tener una secuencia consecutiva de términos constantes al menos superior al grado de la sucesión. Por ejemplo, si la sucesión es polinómica de grado 3 se necesita una secuencia de 4 términos a_i. La sucesión polinómico-geométrica de orden multiplicativa (término geométrico multiplicativo) se dificulta diferenciarla de las diferentes formas, para tales casos solamente se cuenta con recursos de ensayo y error para obtener la razón r con las ecuaciones recursivas para luego continuar aplicando el método propuesto.

El método es deductivo y facilita obtener términos generales de sucesiones y series con expresiones polinómicas de alto orden. Para el docente y el estudiante de primer semestre de educación superior le resultará práctico para diseñar y formular problemas aplicados a diferentes áereas y campos del conocimiento como la geometría, la física, la economía, etcétera, como los siguientes modelos:

- Determine el término general de la siguiente sucesión de cuadrados:

(5) (14) (30) (55)

- El desplazamiento f(t) en metros que realiza un cuerpo cada segundo con respecto a un punto está dado por la siguiente tabla.

Tabla 3. **Tabla de datos del desplazamiento de un cuerpo con respecto al tiempo**

Tiempo (seg)	1	2	3	4	5
Desplazamiento (m)	-4,2500	-4,6667	-0,7500	8	22,0833

Fuente: los autores

- Halle f (t) y determine el desplazamiento cuando t=6 segundos.
- Encuentre el término general de la serie: $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots$

Referencias

Grossman, S. (1997). *Álgebra lineal*, México D.F., McGraw-Hill Interamericana.

Smith W., A. (1998). *Análisis numérico*, México D.F., Prentice-Hall Hispanoamericana.

Spiegel, M. (1998). *Manual de fórmulas y tablas matemáticas*, México D.F., McGraw-Hill Interamericana.